Conservatoire National
des Arts et des Métiers
CNAM-Liban
ISSAE

Prof: J.SAAB

Automates, Codes et Graphes
Fiche de TD1

---

1. Donner une liste de cinq éléments dans chacun des ensembles suivants:

   (a) Σ^*, où $\Sigma = \{a; b; c\}$
   (b) $\{m \in \Sigma^*;\ |m| \leq 2\}$, où $\Sigma = \{a; b\}$
   (c) $\{m \in \Sigma^*;\ |m| = 4\}$, où $\Sigma = \{a; b\}$

   Lequel de ces ensembles contient le mot nul ε

---

2. Soient les ensembles $A = \{a; b\}$, $L_1 = \{ab; ba\}$, $L_2 = \{\varepsilon; b^2\}$

   (a) Trouver les ensembles L_1L_2, L_2L_1, L_1^2.
   (b) Donner l'ensemble L_2^*
   (c) Montrer que $L_1^* \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A^{2n}$
   (d) Donner un mot de longueur paire appartenant à l'ensemble $A^* - L_1^*$

---

3. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$, Expliquer, par compréhension, les langages suivants:

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{a, ab, ab^2, ab^3, ...\} \\
L_2 &= \{a^m b^n / m, n \in \mathbb{N}^*\} \\
L_3 &= \{a^m b^m / m \in \mathbb{N}^*\} \\
L_4 &= \{b^m a b^n / m, n \in \mathbb{N}^*\}
\end{aligned}
$$

---

4. Soit $\Sigma = \{a, b\}$ un alphabet, $K = \{a, ab, a^2\}$, $L = \{b^2, aba\}$ deux langages de Σ^*. Donner les langages: KL, L^2, LK, L^0

---

5. Soit $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alphabet. Trouver L^* lorsque L est un langage de Σ^* donné par:

   (a) $L = \{a, b\}$
   (b) $L = \{b^2\}$
   (c) $L = \{a, b, c^3\}$

---

6. Montrer qu'il n'existe pas de langage L sur $\Sigma = \{a; b\}$ tel que

$$L^* = a^* b^*$$

---

7. Soient L et M deux langages sur le même alphabet Σ. Montrer que

$$L.(M.L)^k = (L.M)^k.L \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

En déduire les propriétés suivantes:

(a) $L.(M.L)^* = (L.M)^*.L$
(b) $L.(M.L)^+ = (L.M)^+.L$

---

8. Montrer pour tout langage L l'équivalence suivante:

$$\varepsilon \in L \Longleftrightarrow L \subset L^2$$

---

9. Soient A, B deux langages d'un alphabet Σ. Montrer que les propositions suivantes sont fausses:

(a) $A \cap B \subset AB$
(b) $AB = BA$
(c) $AA^* = A^*$
(d) $A^* = B^* \Rightarrow A = B$
(e) $A \subset A^2$

---

10. Soient L, L_1, L_2 trois langages d'un alphabet Σ. Montrer que:

(a) $(L^*)^* = L^*$
(b) $L_1 \subset L_2 \Rightarrow L_1^* \subset L_2^*$
(c) $(L^*)^2 = L^*$
(d) $L\phi = \phi L = \phi$
(e) $\varepsilon^* = \varepsilon$ et $\phi^* = \varepsilon$
(f) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cup L_2^*)^* = (L_1^* L_2^*)^*$

---

11. Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, montrer que

$$(a^*b)^* \cup (b^*a)^* = (a \cup b)^*$$

---

12. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. On note par M le langage formé des deux mots ab et ba; $M = \{ab, ba\}$.

(a) Déterminer les langages M^2 et M^3
(b) Quelle est la longueur des mots de M^n?
(c) Combien un mot de M^n contient - il de lettres a?
(d) Combien y a -t-il de mots dans M^n?
(e) Dire pour chacun des mots suivants s'il appartient ou non à la réunion des M^n :

$$ababa, abbaab, abbbaa, aababa$$

13. Donner une expression régulière correspondant aux langages suivants:

    (a) $L_1 = \{ab; ac; ad\}$
    (b) $L_2 = \{ab; ac; bb; bc\}$
    (c) $L_3 = \{a, ab, abb, abbb, ...\}$
    (d) $L_4 = \{ab; abab; ababab; ...\}$
    (e) $L_5 = \{abcd, abcbcd, abcbcbcd, ...\}$

---

14. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, donner une expression régulière de l'ensemble de tous les éléments de Σ^*

    (a) Contenant exactement deux "b"
    (b) Contenant au moins deux "b"
    (c) Qui commencent et se terminent par un "a" et contenant au moins un "b" et un "c"

---

15. On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, donner une expression régulière de l'ensemble de tous les éléments de Σ^*

    (a) Contenant exactement deux "0" ou exactement deux "1"
    (b) Contenant un nombre pair de "0"
    (c) Qui commencent et se terminent par "0" et contenant au moins un "1"

---

16. On se donne la grammaire $G = (T, N, S, R)$ avec $T = \{b, c\}, N = \{S\}, R = \{S \to bS|cc\}$. Trouver le langage associé à G

---

17. Soit la grammaire $G = (T, N, S, R); T = \{0, 1\}, N = \{S\}, R = \{S \to 0S|1S|0\}$. Donner $L(G)$

---

18. Soit la grammaire $G = (T, N, S, R)$ avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T & = & \{a, b, 0\} \\ N & = & \{S, U\} \\ R & = & \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & aSa|bSb|U \\ U & \to & 0U|\varepsilon \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

    Trouver $L(G)$

---

19. On se donne le langage $L = \{ab^n a \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}$. Trouver une grammaire G telle que $L(G) = L$.

---

20. On se donne le langage $L = \{0^{2n}1^n \text{ tq } n \in \mathbb{N}\}$. Trouver une grammaire G telle que $L(G) = L$.

---

21. Soit $G = (T, N, S, R)$ avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} T & = & \{a, b, c, d\} \\ N & = & \{S, U\} \\ R & = & \left\{\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aU|c \\ U & \rightarrow & Sb|d \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

Quel est le type de cette grammaire? Trouver son langage

---

22. Soit L le langage sur $\sum = \{a, b, c\}$ contenant les mots avec au moins une fois la chaine *bac*. Définir formellemet L et construire une grammaire hors contexte puis une grammaire régulière décrivant L

---

23. On considère le langage L des mots sur $\{0, 1\}$ qui représentent des entiers pairs non signés en base 2 (les mots de ce langage se terminent tous par 0 et ne commencent pas par 0, sauf pour l'entier nul). Définir formellement L et construire une grammaire régulière décrivat L

---

24. On consdère la grammaire $G = (T, N, S, R)$ avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} T & = & \{a, b, c\} \\ N & = & \{S, D, E\} \\ R & = & \left\{\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSDE|\varepsilon \\ aD & \rightarrow & ab \\ bE & \rightarrow & bc \\ cD & \rightarrow & DE \\ bD & \rightarrow & bb \\ cE & \rightarrow & cc \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

   (a) Quel est le type de G
   (b) Ecrire une dérivation qui, partant de l'axiome, applique deux fois la première règle et une fois la seconde, et poursuivre la dérivation jusqu'à obtenr une chaine de terminaux.
   (c) En raisonnant par récurrence, déterminer $L(G)$